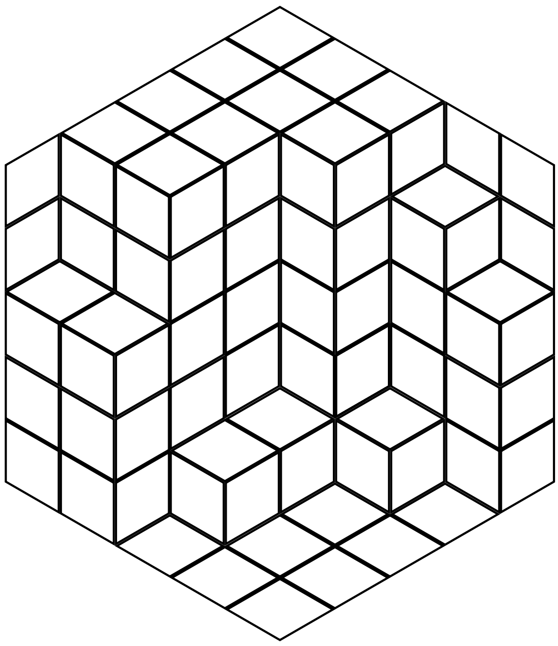
竹北演講講稿

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 29, 2005

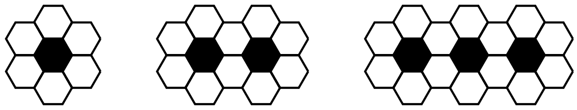


目 錄

1　試題欣賞

〈等差數列〉

例題 **1** 用黑、白兩種顏色的正六邊形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 個　　第 2 個　　第 3 個

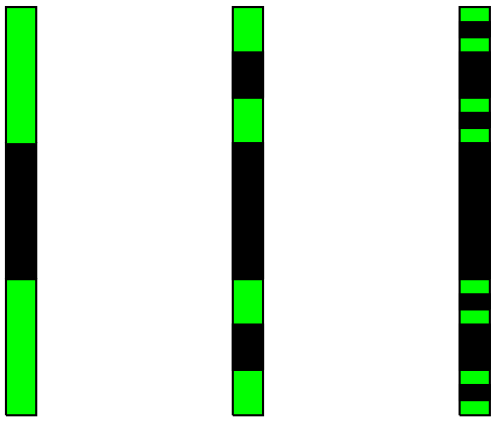
試問：

(1) 第 4 個圖案有白色地磚多少塊？

(2) 第 n 個圖案有白色地磚多少塊？

〈等比數列〉

例題 **2** 有一廟為了祈福，依神明指示：在廟前立了一根高 8.1 公尺的綠色竹竿，第一天將竹竿平分成三等份，並將中間的那等份塗成黑色；第二天將剩下綠色的那兩段竹竿，也分別平分成三等份，並將中間的等份塗成黑色，如下圖所示：



第一天　　第二天　　第三天

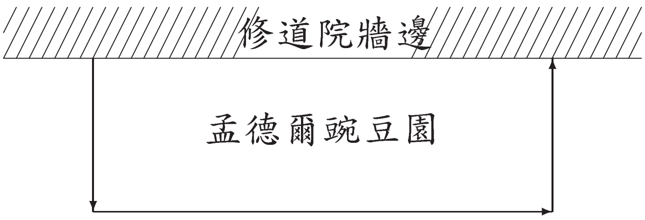
依此連續做五天。試問：

(1) 五天後綠色部份的竹竿總共有幾段。

(2) 這些綠色部份的竹竿總長是多少？

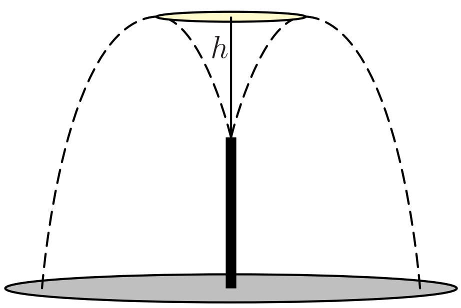
〈二次函數的最大、最小值〉

例題 **3** 孟德爾想在修道院的後院牆邊，用圍籬圍出一塊矩形豌豆園（如下圖：只須圍三邊，第四邊是牆壁），若籬圍的長度有 48 公尺，則要如何才能圍出最大面積？



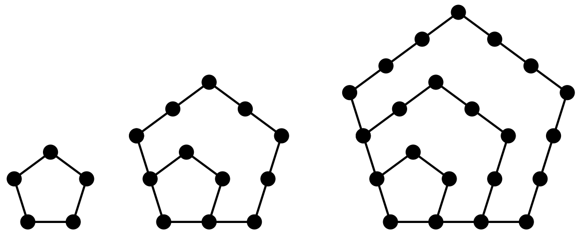
〈二次函數的最大、最小值〉

例題 **4** 購物商場的中央有一個圓形噴水池，水池中央安裝一個垂直於水面且高出水面 5 公尺的水柱。若從柱頭向上噴水，並假設水流在各個方向均沿形狀相同的拋物線落下（如下圖所示）。現在要在噴水口的上方 h 公尺處加裝一半徑 2 公尺的圓盤，以便在圓盤上放一藝術品供遊客欣賞。但為了美觀，設計師希望水流的最高點恰在圓盤邊緣，且水流落點處距噴水柱 5 公尺。求 h 的值。



〈遞迴數列〉

例題 **5** 下圖中的黑點分別落在正五邊形的頂點或邊上，如第一圖有 5 個黑點，第二圖共有 12 個黑點，第三圖有 22 個黑點。



第一圖　　第二圖　　第三圖

按照這樣的規律，令 a_n 為第 n 個圖上的黑點總數。這樣形成的數列 $\langle a_n \rangle$ 就是畢達哥拉斯曾經研究過的五邊形數列。

(1) 寫下 a_{n+1} 與 a_n 的遞迴關係。

(2) 求出五邊形數 a_n 的一般項公式。

〈因數與倍數〉

例題 **6** 每一本現代的書都有國際標準書碼（或稱 ISBN 碼），國際標準書碼一共有十碼，前九碼是 9 個數字，稱為「訊息碼」；第十碼可能是數字或是 這個記號，稱為「檢查碼」。檢查碼是由訊息碼所決定的，將訊息碼每個數字依序分別乘上 *1*、*2*、*3*…、*9*，然後除以 11，當所得的餘數是 10 時，規定檢查碼爲，餘數不爲 10 時，就以此餘數爲檢查碼。例如《阿草的葫蘆》這本書的訊息碼為 957-990-882，又

$$1\times 9+2\times 5+3\times 7+4\times 9+5\times 9+6\times 0+7\times 8+8\times 8+9\times 2=259$$

除以 11 所得的餘數為 6，故檢查碼爲 6，此書完整的 ISBN 碼為 957-990-882-6，如下圖的標籤所示：

ISBN 957990882-6
00252
9 799579 908824

(1) 婷婷從電腦上查得《幾何原本十三卷》這本書的 ISBN 碼，並用噴墨印表機將它印下。由於不小心觸摸，使得其中的第三碼數字模糊了，但是其它的數字還很清楚，書碼如下所示

ISBN：04■-620-112-0

你能推得該書碼的第三碼應該是多少嗎？

(2) 盜版業者將一本書的訊息碼 9 個數字中某 2 個不一樣的數字對調，其餘保持不變（檢查碼也不變）。試問：這本盜版書的新碼符合 ISBN 碼的規定嗎？

2 完中出頑童

台北縣有十三所完全中學，也是最先設有完全中學的縣市。為了跟傳統學校競爭，在完全中學設立資優班及舉辦各種不同的競賽是免不了，也是容易想到的招生噱頭。例如三峽的明德完全中學在體育項目就有過輝煌成績，培養過射箭的金牌選手。二００五年十二月十四日是相當寒冷的一天，也是台北縣九十四學年度縣立高中職數學科學藝競賽（第五屆）的日子，比賽地點就在三峽的明德完全中學。經北二高過三峽的人都會發現台北大學與恩祖公醫院是三峽的兩個醒目路標。事實上，祖師廟與鳶山才是三峽的名勝。在我還不會開車之前，從新店搭客運繞小徑到明德完全中學給場演講，是一趟充滿鄉下味道的旅遊。那蜿蜒崎嶇的山路，也是培養半睡半醒狀態的好時機，愛迪生的驚人創造力就是透過這種狀態培養出來的。沒想到北二高的開通與學會開車這兩件事情兜在一起，就徹底毀滅這種重溫舊夢的機會。儘管小徑勝二高，但是交通的便利性還是技高一籌地擊敗了夢想。

這幾屆數學科學藝競賽都分成三個階段進行，先考一小時的計算與證明題，再來一小時的填充題測驗。為了區分成績相同者，最後有個口試。參加口試的學生都是成績名列前茅者，這次的口試題目只有一題，是一道推理問題。讓我們來欣賞這道口試題目：

題目：　藍委員半夜患了急性盲腸炎，需馬上動手術，但是他同時感染了一種具有高度傳染力的皮膚病。為了慎重起見，三位住院醫師依序輪流進去幫他動手術。每位動手術的醫師雙手必須戴手套，而且藍委員的皮膚病一定會污染使用過手套的外部。

除了藍委員外，三位住院醫師可能有一位也已經得了這種皮膚病，但我們並不清楚是哪一位醫師得這種皮膚病。正當手術要進行時，護士才發現只有兩副消過毒的手套可用，而且手術馬上要進行，已經沒時間消毒或再準備手套了。

為了不讓醫師互相感染皮膚病，該如何使用手套呢？護士說她知道。你知道嗎？

今年暑假，對師大數學系的教學碩士班開了一門《中學代數學》的課程，我把教的內容稱為「543 的數學」。原因是不會有人教我教的那種東西及採取那樣的教法。等暑假結束後，就在十一月，收到一封寄給我的郵件，帳號是 alin543@… 的形式，打開一看，內容是這樣寫的：

> 教授您好
>
> 我只是網路上一個瀏覽者，
>
> 我遇到了兩個問題，
>
> 能否麻煩您為我解答。
>
> 謝謝。
>
> 疑惑的人　　　洪小姐

收到這 e-mail，有點以為是我的學生對我的惡作劇，要不然怎麼會有 alin543@… 這樣巧的帳號呢？過了幾天之後，發現只是巧合而已，原來我的學生沒有我所期望的那種幽默感。那是一封在台北市某國小教書的洪老師的郵件。她問我兩道台北美國學校七年級的數學功課，〈藍委員〉就是其中的一個題目。原題是英文題目，人名也是美國名字，為了入境隨俗及讓題目更有張力，我將題目的情境稍作修改，並取闌尾炎的諧音藍委員，以符合國情。

在我收到這道問題時，想了一下，不得其解，就擱著。剛好數學系的謝同學來我辦公室，就讓她想這道問題。她想了一會兒，也得不出答案，我叫她帶回宿舍想。謝同學走到半途就想出答案來了，於是匆忙又高興的跑來告訴我她的答案：

〈謝同學解法〉

第一位醫師戴上第一副手套之後，再套上第二副手套，然後進行

手術。術後第二副手套外部被藍委員的皮膚病感染，第一副手套內部可能被第一位醫師感染，也可能沒被感染，但第一副手套外部與第二副手套內部肯定是乾淨的。

接著讓第二位醫師戴第一副手套外部進行手術，而最後讓第三位醫師戴第二副手套內部進行手術。這樣就可以完成任務，而且醫師間不會互相感染。 ☒

這也是我回給洪老師的解法。我把這道題目用來當本次數學科學藝競賽口試題，我也一直認為謝同學的解法應該是唯一的一種。可是有一位學生在口試時，看到他在紙張上畫著「第一位醫生左手戴一隻手套，右手戴三隻手套」，又說這樣可以完成。起先以為學生想錯了，後還仔細聽他講完，發現這也是正確的操作方法：

〈郭學生的另一妙解〉

第一位醫師戴上第一副手套之後，右手再套上第二副手套的兩隻（即第一位醫師左手戴一隻手套，而右手戴三隻手套的意思）。術後該醫師將右手最外的手套反套回他的左手，此時第一位醫師雙手各套兩隻手套。

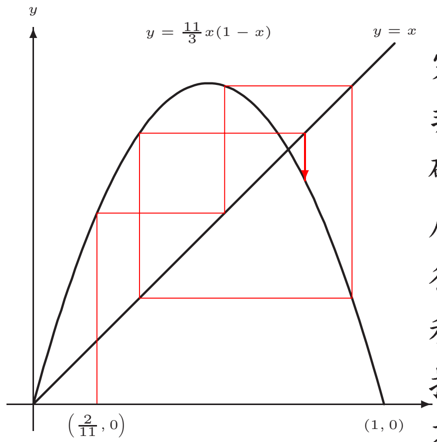
接著，第一位醫師將雙手反套給第二位醫師，此時第一位醫師所接觸的手套變成第二位醫師的外套。當第二位醫師手術完成後，再將右手最外的手套反套回他的左手。此時第二位醫師左手套三隻手套，右手僅套一隻，且兩隻外套都是乾淨，未被污染。

最後，第二位醫師只需將手套再反套給第三位醫師進行手術即可。 ☒

有了謝同學的解答，加上完中學生的洞見，讓我們可以進一步的思考「是否還有其它的解法呢？」如果第一位醫師師左手戴一隻手套，而右手戴兩隻手套，那麼可以找到沒有感染的戴法嗎？

練習 **1** 試著找出第三種解法。

3 混沌數學



混沌理論是社會科學與自然科學最完美結合的理論，它研究如何把複雜的非穩定事件控制到穩定狀態的方法，它研究世界如何在不穩定的環境中穩定發展的問題。混沌無處不在：出現在天氣行為中，存在於海洋湍流中，野生動物種群的數量漲落中，以及心臟和大腦的振動中。它研究自然界的不規則方面，不連續和不穩定的方面，開啟了簡化複雜現象的可能性。

洛倫茨（Lorenz）的蝴蝶效應現象

亞瑟的路徑鎖定效應

邏輯斯蒂（Logistic）的倍週期分叉現象

混沌世界是紛繁、複雜、多變的世界，是一個在非穩定環境下求得穩定發展的世界。處在混沌世界的人們需要學習混沌理論，用混沌理論瞭解我們面臨的現實世界的各種現象，有助於我們迎接新世紀的挑戰。

第一部份：多項式知識

解多項式方程組的根是相當有趣而且經常出現在應用科學上的問題，譬如說電路分配問題，機械手問題等等。

1-1. 請依照底下的程序解多項式方程組

$$\begin{cases} y=\frac{7}{2}x(1-x); \\ x=\frac{7}{2}y(1-y). \end{cases}$$

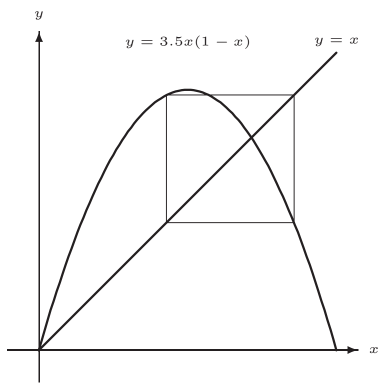
(1) 將第一式代入第二式，消去未知數 y，得一僅含 x 的整係數多項式方程式。求此整係數多項式方程式。

(2) 利用一次因式檢驗法檢查上述整係數多項式方程式的所有有理根。

(3) 解多項式方程組

$$\begin{cases} y = \frac{7}{2}x(1-x); \\ x = \frac{7}{2}y(1-y). \end{cases}$$

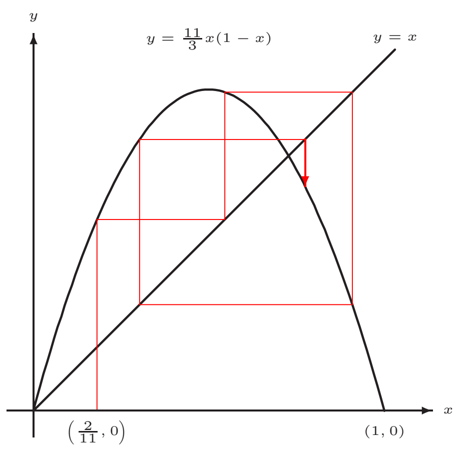
1-2. 如下圖所示：抛物線 $y = 3.5x(1-x)$ 與直線 $y = x$ 上各取兩個相異點，使它們成為正方形。



求抛物線上取的點坐標為何？

第二部份：混沌數學

如下圖所示



從 $\left(\frac{2}{11},0\right)$ 出發，先鉛直的爬到與拋物線 $y=\frac{11}{3}x(1-x)$ 相交的點，然後水平的爬到與直線 $y=x$ 相遇的點；再鉛直的爬到與拋物線 $y=\frac{11}{3}x(1-x)$ 相交的點，然後水平的爬到與直線 $y=x$ 相遇的點；⋯，依此規律，進行下去。這有點像一隻蜘蛛在爬網一樣，所以稱為混沌學的蜘網理論。為了方便起見，把 $\left(\frac{2}{11},0\right)$ 稱為起始點，令符號 P_n 代表第 n 次碰到拋物線的點；符號 Q_n 代表第 n 次與直線相遇的該點坐標。

2-1. 已知直線 $y=x$ 與拋物線 $y=\frac{11}{3}x(1-x)$ 相交的點中，有一點是原點，求另一交點坐標。

2-2. 求 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,P_3,Q_3,P_4,Q_4$ 的坐標。

2-3. P_n 與 Q_n 的坐標有何關係？

2-4. 令 P_n 的坐標為 (x_n,y_n)，試寫下 x_{n+1} 與 x_n 的關係。

2-5. 如果將蜘網理論用在拋物線 $y=3.5x(1-x)$ 上，令起始點為 $\left(\frac{7-\sqrt{17}}{14},0\right)$，那麼寫下 P_n 的公式。

第三部份：歷史沿革

現今世界上稍微瞭解一點混沌數學的人，無人不知李天岩與約克於 1975 年在《美國數學月刊》上發表了一篇極其重要的論文“週期三則亂七八糟”。該文首創了“混沌” (chaos) 的概念，開拓了整個科學界對混沌動力系統研究的新紀元。

李天岩畢業於清華大學，所以對中國高等教育中普遍存在的填鴨式教學深有體會，並深惡痛絕。他曾講過這樣的故事：一位數學研究生當博士資格考試的口試時，教授要考她證明特殊的吉洪諾夫（A. Tychonoff）定理：兩個緊緻集的乘積也是緊緻的，她央求教授讓她證明一般的吉洪諾夫定理：任意個數緊緻集之乘積也是緊緻的，因為她記得證明的每一個細節而不知道怎樣證明更簡單的兩個緊緻集的情形。李天岩堅決反對學生死記硬背，不求真懂。李天岩堅信，若是真正瞭解一門學科，就會講得連普通人也能聽得懂。

“蝴蝶效應”相傳是洛倫茲在一次計算中首次偶然發現的。1961 年洛倫茲在進行數值長期天氣預報的計算，當時在計算中使

用了一台現在看來速度太慢的電腦，有一次他在計算中斷後重新開始計算時，把上一次計算的中間資料作為這次計算的初始值輸入電腦，指望在重複給出上次的計算結果後電腦再繼續運行下去。然而出人意料的是計算結果只在開始的一小段與原來結果偏差很小，之後偏差越來越大以致得到完全相反的結果。洛倫茲意識到問題出在他輸入資料的精度上。因為電腦能以六位元小數運行，這次存儲下的是：0.606127，而印表機僅列印了前三位元數位：0.606。這次他是以這個三位小數作為重新計算的初始值，忽略掉了尾數 0.000127。洛倫茲認為造成重大偏差的原因就是忽略掉了這點尾數，由此他認定這個方程對初始值具有高度的敏感性。洛倫茲將這一現象形象地比喻為“蝴蝶效應”，意思是說一隻蝴蝶扇動翅膀所引起的氣流擾動會發展成一場“巨大風暴”。