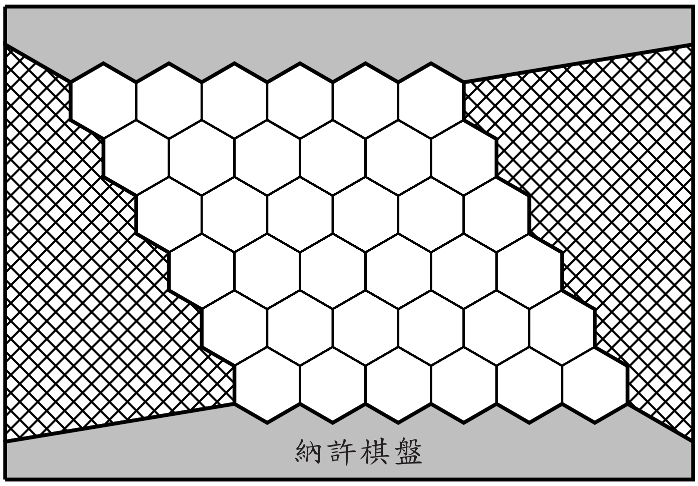
2005 AMC 代數與數論

許 志 農

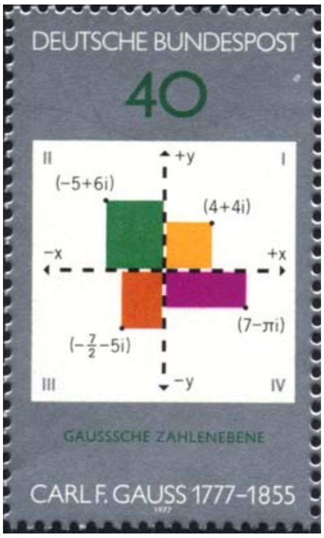
國立台灣師範大學數學系

July 15, 2005



目 錄

1 使用數學，不要被數學所使用



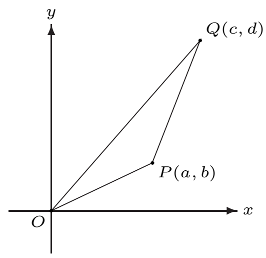
1831 年高斯認為複數不夠普及，在《哥庭根學報》上詳細說明坐標平面上的一個點 (a, b) 可以用複數 $a + bi$ 來表示，並建立了複數的某些運算，使得複數的運算也像實數一樣地代數化。 次年他發表了一篇備忘錄，第一次提出“複數”這個名詞，奠定複數在數學的地位。左圖是一張以複數平面為背景的郵票，這是為了紀念高斯大量的使用複數。對於一位創造數學概念，使用數學概念的人，發行郵票紀念他是應該的，總比紀念那些被數學所使用的人好。

我與“數學概念”這位奇人相遇的幾則小故事是在談論「中學學過的一些數學概念，如何在我解題過程中，扮演臨門一腳的角色，也讓我見識到“數學概念”這位巨人的魅力與威力。」幸虧有數學前輩們嘔心瀝血的提出這些“數學概念”，否則會走許多冤枉路。所以這裡的奇人就是“數學概念”，我只是安靜的觀察他們如何對問題下手的「觀察者」而已，或者說，我是“數學概念”的「粉絲」（fans）。

題目：(使用斜率) 如右圖所示，設 $P(a, b)$ 與 $Q(c, d)$ 是坐標平面第一象限上的兩個點。試判斷

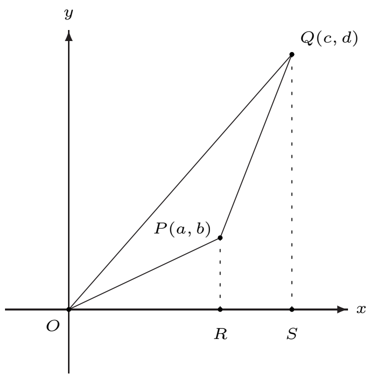
$$ad - bc$$

的正、負情形。



單從圖形來看，似乎可知 $a < c$ 與 $b < d$，但這樣的不等式只能推得 $ab < cd$，無法判斷 ad 與 bc 的大小。接下來，我們想透過與引進各種不同的“數學概念”來轉化與解決這個問題：

① （與面積相遇）考慮三角形 PQO，透過“面積”的概念來判斷 $ad-bc$ 的正負：為了求 PQO 的面積，作 P 與 Q 在 x 軸的垂足為 R 與 S：



計算

$$\begin{aligned}\triangle PQO &= \triangle QOS - \triangle POR - \text{ 梯形 } PRSQ \\ &= \frac{c\cdot d}{2} - \frac{a\cdot b}{2} - \frac{(b+d)\cdot(c-a)}{2} \\ &= \frac{ad-bc}{2},\end{aligned}$$

得兩倍三角形 PQO 的面積為 $ad-bc$，即

$$ad-bc>0.$$

② （與斜率相遇）將 P 與 Q 分別與原點作連線，得直線 PO 與 QO，考慮這兩條直線的斜率，得 OP 的斜率 $\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$ 與 OQ 的斜率 $\frac{d-0}{c-0}=\frac{d}{c}$。現在比較斜率大小，因為直線 OP 比直線 OQ 不傾斜，所以得

$$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{ad-bc}{ac}>0.$$

又 a,c 都是正數，所以

$$ad-bc>0$$

恆成立。

坐標平面上的三角形、直線與點原本是幾何的東西，但是透過「面積」、「斜率」、「複數」與「向量」，將幾何的層面導引到可以運算的代數層次，而且這些概念都是中學就學會的基本工具。

笛卡爾創立直角坐標系，可以將許多平面幾何問題代數化處理，但是，那些應該定坐標系解決，那些不需要，是最難拿捏的地方。讓我們欣賞一道同時使用“直角坐標”與“有向角”這兩個數學概念的題目：

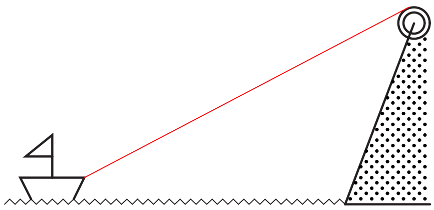
題目：(使用坐標與有向角) 印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方位上。

問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？

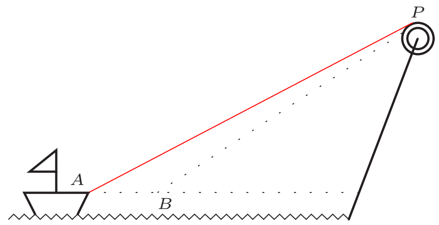
（太陽昇起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北）

「兩邊之和大於第三邊」是大家在日常生活中與數學課程裡非常熟悉的三角不等式。這個概念的使用有時候很容易，很明顯，但有時卻不容易發覺。底下就是一個例子

題目：(使用三角不等式) 如右圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。



如下圖所示



滑輪捲動的繩子長度為

$$|PA - PB|;$$

而輪船前進的距離為

$$AB.$$

由三角形 PAB 的三角形不等式知道

$$|PA - PB| < AB,$$

即滑輪捲動的繩子長度 $<$ 輪船前進的距離。 ⊠

在房子裡，想估算一間面積大小，最簡單的方式莫過於憑直覺。如果不靠直觀，另一個方便又準確的方法是「數鋪在地上的磁磚個數」。因為磁磚方方正正，每個大小相同，可以反應房間的大小。那麼，在直角坐標平面上，那個東西可以拿來當磁磚，反應面積呢？皮克就用排列僅然有序的「格子點」來表示面積。讓我面來欣賞這一概念：

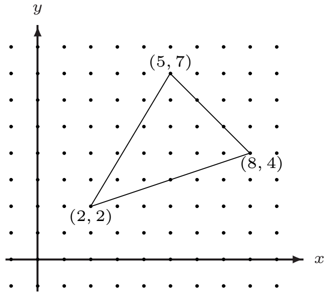
題目： (使用格子點的個數)

格子點是直角坐標平面上 x 與 y 坐標都是整數的點，如右圖所示，三角形內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。

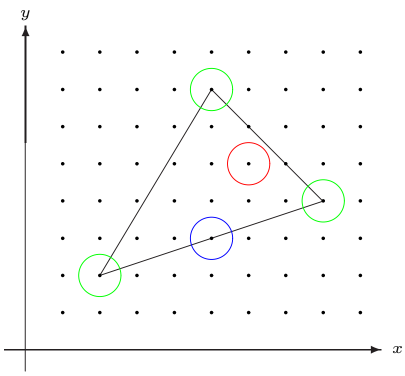
皮克發現：內部有 I 個格子點，邊上有 S 個格子點的三角形面積為

$$\frac{S}{2} + I - 1.$$

你有比較好的方法解釋這公式的合理性嗎？



這個公式常稱為「皮克公式」。



一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：
因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 I 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：
因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：

因為三內角和為 180°，所以三頂點附近的區域只能拼出半個圓，也就是 $\frac{1}{2}$ 單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

$\boxtimes$

“蝴蝶效應”相傳是洛倫茲在一次計算中首次偶然發現的。1961 年洛倫茲在進行長期天氣預報的計算，當時在計算中使用了一台現在看來速度太慢的電腦，有一次他在計算中斷後重新開始計算時，把上一次計算的中間資料作為這次計算的初始值輸入電腦，指望在重複給出上次的計算結果後電腦再繼續運行下去。然而出人意料的是計算結果只在開始的一小段與原來結果偏差很小，之後偏差越來越大以致得到完全相反的結果。洛倫茲意識到問題出在他輸入資料的精度上。因為電腦能以六位元小數運行，這次存儲下的是：0.606127，而印表機僅列印了前三位元數位：0.606。這次他是以這個三位小數作為重新計算的初始值，忽略掉了尾數 0.000127。洛倫茲認為造成重大偏差的原因就是忽略掉了這點尾數，由此他認定這個方程對初始值具有高度的敏感性。洛倫茲將這一現象形象地比喻為“蝴蝶效應”，意思是說一隻蝴蝶扇動翅膀所引起的氣流擾動會發展成一場“巨大風暴”。

“蝴蝶效應”是“混沌數學”可以解釋的一種現象。什麼是“混沌數學”呢？它是由多項式、三角函數等這些基本函數迭代而成的複雜數學，現在就讓我們來計算一道拋物線所產生的“混沌數學”：

題目： (使用一次因式檢驗法)

如右圖所示：拋物線

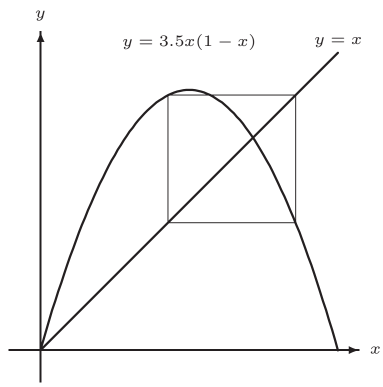
$$y = 3.5x(1-x)$$

與直線

$$y = x$$

上各取兩個相異點，使它們成為正方形。

求拋物線上取的點坐標為何？

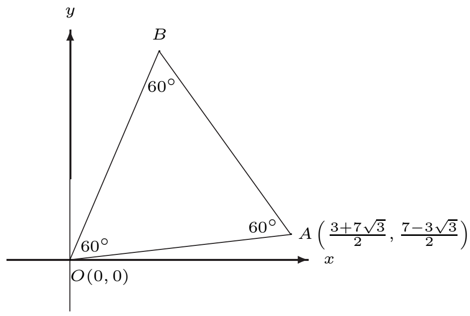


題目： (使用隸美弗定理)

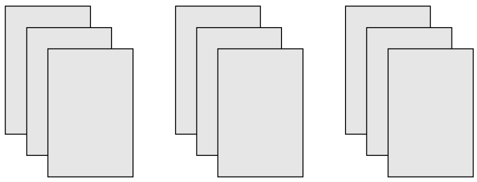
在右圖中，三角形 OAB 是坐標平面上的正三角形，且 $O=(0,0)$，

$$A = \left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2}, \frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right).$$

試求 B 點的坐標。



題目： (使用未知數) 老師背對著學生，讓學生按下列四個步驟操作：



① 分發左、中、右三堆牌，每堆牌不少於兩張，且各堆牌現有的張數一樣；

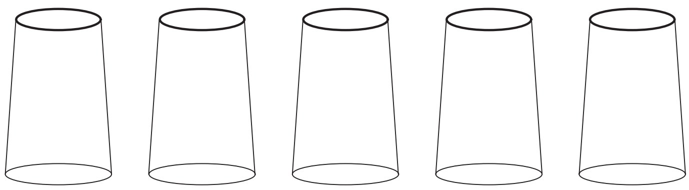
② 從左邊一堆拿出兩張，放入中間一堆；

③ 從右邊一堆拿出一張，放入中間一堆；

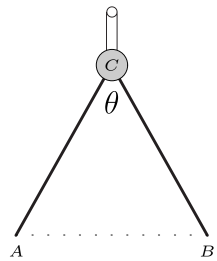
④ 左邊一堆有幾張牌，就從中間一堆拿幾張牌放入左邊一堆。

這時老師準確說出了中間一堆牌現有的張數，你認為奧妙在哪呢？

練習 **1** (使用 $+1$ 與 -1 的概念) 桌上有五只茶杯，杯口都朝下，每次運動只能將兩只茶杯翻轉。請問有辦法在若干次運動之後，讓所有的茶杯杯口都朝上嗎？



練習 **2** (使用面積公式) 如下圖所示，圓規的柄長 $CA = CB = 8$，當圓規張開的張角為 θ 時，會圍出一個三角形 ABC。問：當 θ 為何值時，三角形 ABC 的面積最大，是多少？



練習 3 (使用餘弦定理) 已知三角形 ABC 的邊長 $AB = c, BC = a, CA = b$ 及 $\angle BCA = 30^\circ$，證明 a, b, c 不可能全為正整數。

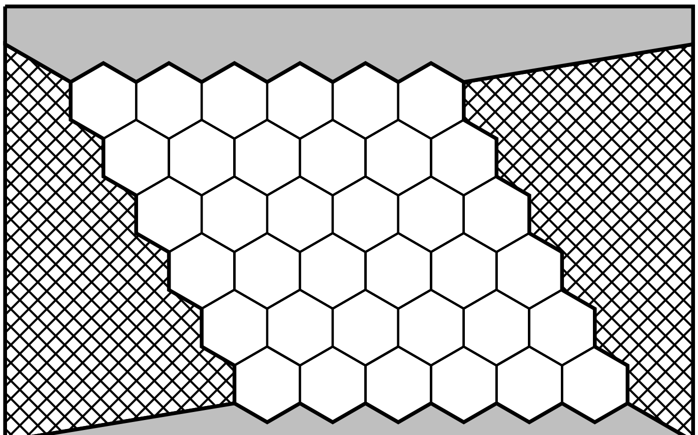
練習 4 (使用行列式) 已知兩位數 a_1a_2 與 b_1b_2 都是 7 的倍數，證明

$$a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1$$

也是 7 的倍數。

2　納許棋的奧秘

看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋盤，據說是他在普林斯頓高等研究院的廁所發現的。因為廁所的磁磚是正六邊形鋪成的，所以納許棋是跟正六邊形有關的遊戲。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形磁磚鋪成）：

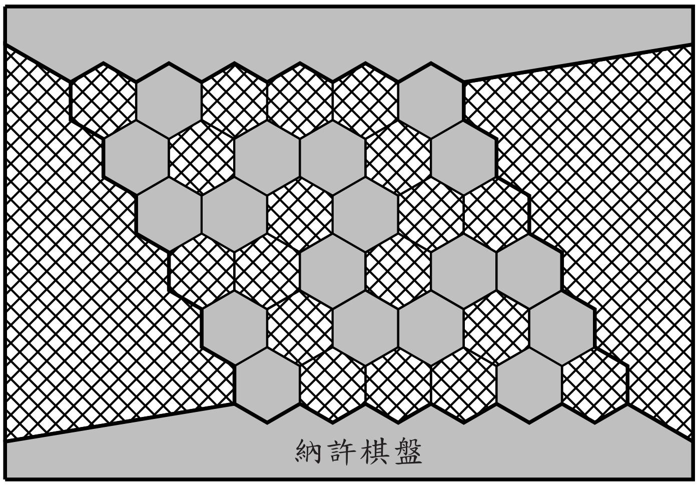


納許棋盤

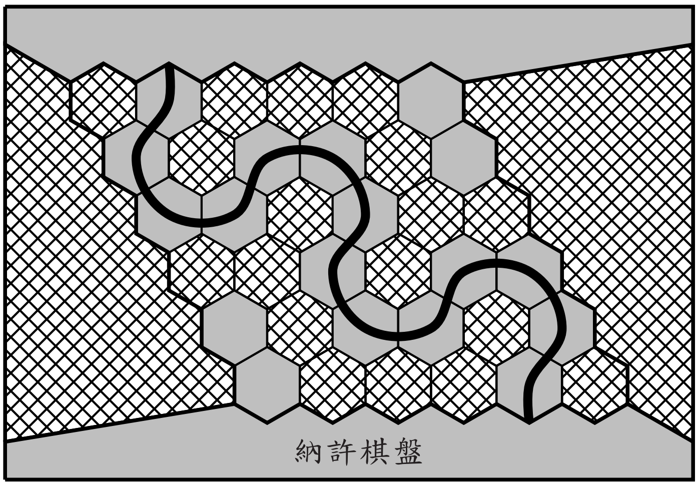
「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先

生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那們另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是這裡所要討論的問題：

題目： (納許棋) 無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利。

兩人玩的遊戲有許多，如象棋，五子棋，圍棋，西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的是如此嗎？讓我們來欣賞灰姑娘的錦囊妙計：

灰姑娘的勞作解法

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根据考古其歷史可追朔到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？

如果網先生的兩塊網狀領土可以透過他佔領的正六邊形土地銜接，那麼網先生就是獲勝的人。否則（網先生無法銜接他的兩塊網狀領土），需說明灰姑娘可以串連她的灰色土地。證明方法是這樣的：

① 利用剪刀將網先生的左、右兩塊網狀領土剪掉。

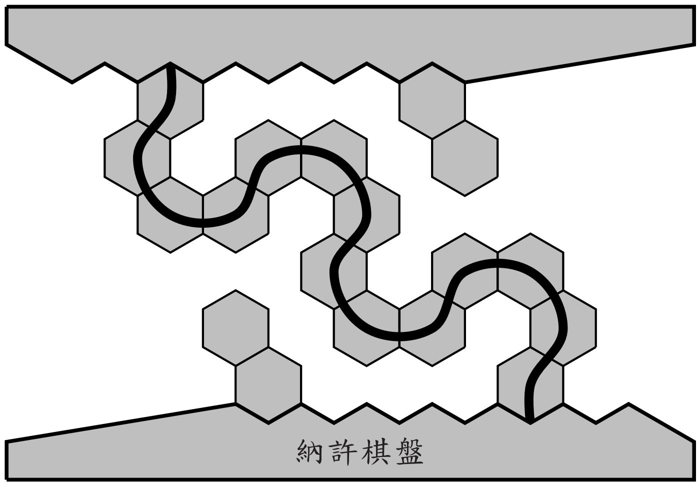
② 再利用剪刀將網先生佔領的十八塊正六邊形網形土地也剪掉。

③ 此時棋盤剩下灰姑娘的上、下兩塊灰色土地及她所佔領的十八塊正六邊形灰色土地。

④ 將右手抓住灰姑娘上方灰色土地，左手捏著灰姑娘下方的灰色領土。看看是否可以將它們拉開。

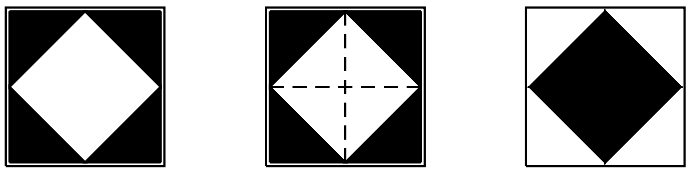
⑤ 若不能拉開，則表示灰姑娘的上、下兩塊灰色土地被她佔領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣。

⑥ 若可以拉開，則沿著灰姑娘的上方灰色土地的下沿，可以找到貫穿網先生左、右兩塊網狀領土的路徑，這樣代表網先生獲勝。



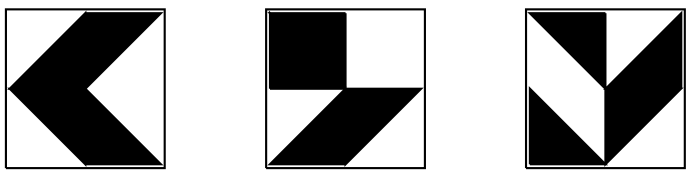
到此，我們已經知道納許棋是一種不會合棋的遊戲。接下來的問題就是「先玩者與後玩者何者有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。

練習 **5** 如下第一圖所示，正方形中心畫一個鑽石菱形。現在將正方形平分成四個小正方形（第二圖），將右上與左下交換，右下與左上交換，得到第三圖。



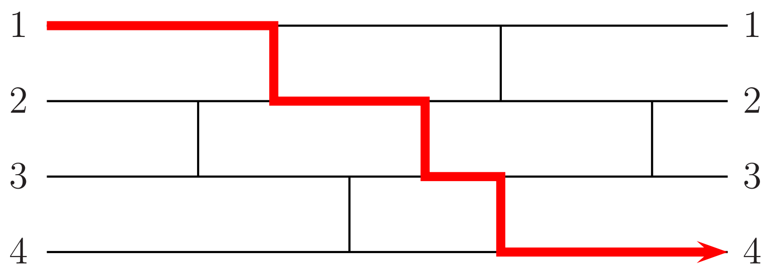
▲ 鑽石遊戲

像這樣，將四個小正方形的位置互換所產生的圖形，稱為原圖的置換圖。試問：下列三個圖，哪幾個是置換圖。



香港有個地產集團設立「恆隆數學獎」（由丘成桐院士主持），用來獎勵中學生在數學科展上的貢獻。首屆（2004 年）銅牌獎是在討論「畫鬼腳」這道中國的傳統遊戲。如下圖所示，在四

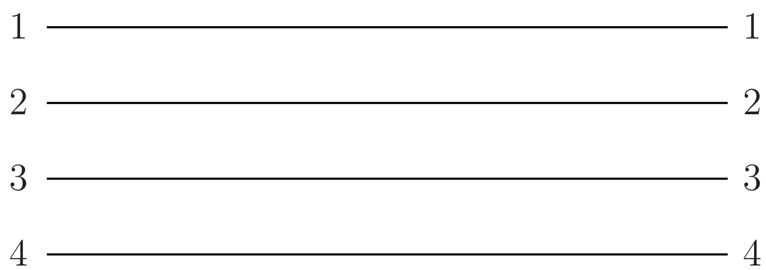
條平行線間畫了七條鬼腳後，左邊的數字 1 往右前進，碰到鬼腳就轉彎，最後抵達數字 4 的位置。



〈鬼腳圖〉

同樣的方法可以發現，數字 2 會走到 2 的位置，數字 3 會跑到 3 的位置，而數字 4 會到達 1 的位置。為了方便起見，就用函數「$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$」來描述這鬼腳圖的結果。看似簡單的鬼腳圖，其實裡面隱藏著許多深邃的數學知識。就讓我們來一道鬼腳大餐吧！

練習 6 甲、乙兩人輪流在下圖中畫鬼腳，甲先畫一條鬼腳，接著換乙畫，⋯，依此次序輪流畫。



〈鬼腳圖〉

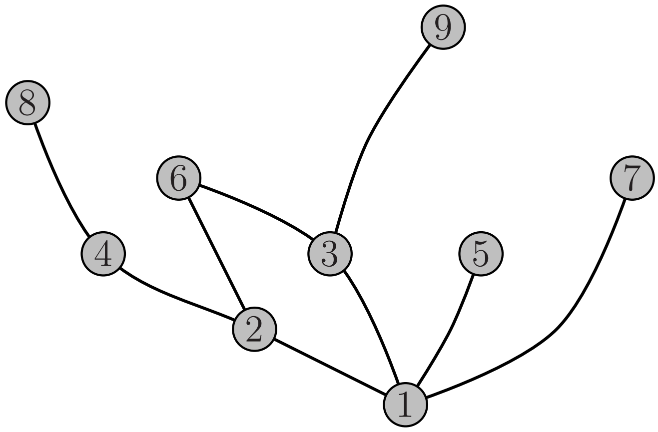
至於鬼腳畫在何處，甲、乙兩人可以自由決定。當有人畫完鬼腳之後，所對應的函數為「$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$」時，此人得勝，比賽停止。

問何者可以得勝。

練習 7 (拔“數”遊戲) 如下圖所示，在種植編號分別為

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

的九棵大樹裡進行拔樹遊戲。甲、乙兩人輪流拔樹，每次拔一棵樹，但是當編號 6 的樹被拔掉時，編號 $1, 2, 3$（6 的因數）的樹也跟著除掉，依此規律拔樹。最後把樹拔光的人獲勝。



〈拔數圖〉

問何者可以得勝。